1 Démonstration par récurrence

Exemples introductif :
Imaginons que des ouvriers construisant un immeuble aient toutes les instructions nécessaires pour construire un étage d'immeuble sur le mÎme modèle que l'étage qui est au-dessous.
Ainsi peuvent-ils construire le deuxième (identique au premier), le troisième (identique au deuxième), le quatrième (identique au troisième) et ainsi de suite ; on peut imaginer qu'ils peuvent alors construire un immeuble aussi haut que l'on veut (en négligeant les contraintes de résistance des matériaux qui limitent les hauteurs d'immeubles).

Le seul problème est qu'il faut **d'abord avoir construit indépendamment** le premier étage, car on ne peut pas prendre pour modèle un étage précédent, puisqu'il n'y en a pas !

Autre exemple : faire tomber des dominos en cascade. Il faut d'abord faire tomber le premier domino et ensuite, la chute d'un domino entraine la chute du suivant.

Principe d'une démonstration par récurrence :

1.1 Description de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Ce principe est basé sur la description de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels :
- Il existe un plus petit entier, 0.
- Chaque entier autre que 0 s'obtient en ajoutant 1 à son prédécesseur.

1.2 Axiome de récurrence

Remarque : Un axiome (du grec ancien axioma, « considéré comme digne, convenable, évident en soi » désigne une proposition indémontrable utilisée comme fondement d'un raisonnement.

Axiome de récurrence Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 et s'il est prouvé que, lorsqu'elle est vraie pour un entier p quelconque supérieur ou égal à n_0, alors elle est vraie pour $p+1$, alors elle est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple rédigé de la démonstration d'une propriété :

Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition qui dépend d'un entier n naturel. On veut montrer que cette proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

On suit la méthode suivante :
- **Identification** de $\mathcal{P}_n$ (égalité, inégalité,...)
- **Initialisation** : on vérifie que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie. (amorçage de la récurrence ou initialisation).

- **Hérédité** : on démontre que la propriété est héréditaire, c'est-à-dire que si l'on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie à un rang $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence), alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie .
- **Conclusion** : alors on en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

1.3 Exemples de rédaction

Exemple 1

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les premiers termes sont$u_0 = 3$; $u_1 = 11$; $u_2 = 51$; $u_3 = 251$; $u_4 = 1\,251$.
On peut envisager que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.
Ce n'est pas parce qu'on le constate sur les premiers termes que l'on eut être sûr que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels n !

Rédaction

Effectuons une démonstration par récurrence :

- Notons $\mathcal{P}_n$ l'affirmation : $u_n = 2 \times 5^n + 1$.
- Initialisation : $n = 0$: $2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 = u_0$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier n quelconque, donc que $u_n = 2 \times 5^n + 1$. (**hypothèse de récurrence**).
  Il faut alors montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

  On a : $u_{n+1} = 5u_n - 4 = 5\,(2 \times 5^n + 1) - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 5 - 4 = 2 \times 5^{n+1} + 1$. donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2 \times 5^n + 1$$

Exemple 2

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est pair.

- Il faut d'abord mathématiser l'affirmation, c'est-à-dire l'écrire sous une forme mathématique sur laquelle on peur travailler.
- L'affirmation s'écrit : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier relatif k_n tel que $7^n - 1 = 2k_n$ (entier dépend de n, donc on ne eut pas utiliser la même lettre pour désigner tous les entiers en question).
- On effectue une démonstration par récurrence avec comme hypothèse de récurrence : « il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $^n - 1 = 2k_n$ ».
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2 \times 0$ donc on obtient bien un nombre pair sous la forme $2 \times k_0$ avec $k_0 = 0$.
- Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque, donc $7^n - 1 = 2k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$.
  Au rang $n+1$: $7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7 \times (2k_n + 1) - 1 = 7 \times 2 \times_n +7 - 1 = 7 \times 2 \times_n +6 = 2\,(7k_n + 3)$ qu'on peut écrire $2k_{n+1}$ en posant $k_{n+1} = 7k_n + 3$.
  Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

1.4 Utilité des deux étapes

Montrons sur deux exemples que si l'on supprime une étape, la démonstration ne donne rien.

Exemple 1 : (on a l'amorçage, mais pas l'hérédité) :
On appelle nombre de Fermat le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$, $(n \in \mathbb{N})$.
Fermat (mathématicien français, 1601 - 1665) a affirmé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est premier.
Effectivement : $F_0 = 3$ est premier ; $F_1 = 5$ est premier ; $F_2 = 17$ est premier ; $F_3 = 257$ est premier et $F_4 = 65\,537$ est premier.
Comme on ne peut pas montrer que la propriété est héréditaire, on ne peut pas effectuer de démonstration par récurrence et donc pas en déduire que la propriété est vraie pour tout n.

D'ailleurs $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ n'est pas premier, ce que Fermat n'avait pas trouvé (mais trouvé par Euler).
En fait, les nombres de Fermat pour $5 \leqslant n \leqslant 32$ ne sont pas premiers. On ne sait pas si F_{33} est premier ou non.

On a bien l'initialisation, mais pas l'hérédité.

Exemple 2 :
Soit P_n la propriété : « 6 divise $7^n + 1$ »
Cette propriété est **héréditaire** à partir de $n = 0$.
En effet : Supposons P_n vraie donc il existe k_n tel que $7^n + 1 = 6k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$.
Alors $7^{n+1} = 7 \times 7^n + 1 = 7(6k_n - 1) + 1 = 42k_n - 6 = 6(7k_n - 1) = 6k_{n+1}$ avec $k_{n+1} = 7k_n - 1 \in \mathbb{Z}$ donc P_{n+1} est vraie aussi.
P_{n+1} est donc toujours vraie lorsque P_n l'est.
P_n est une propriété **héréditaire**.

On ne peut pas conclure en invoquant l'axiome de récurrence, car nous n'avons pas montré l'initialisation. **Or $\mathbf{P_0}$ est faux !**.
On ne sait donc pas si la propriété est vraie pour d'autres valeurs entières de n autres que 0.

En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières de n ! (facile à montrer en spécialité avec les congruences).

Remarque :
Les deux étapes de la démonstration par récurrence sont bien indispensables !

2 Généralités

Définition : Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Si u est le nom de la suite, l'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle u_n (notation indicielle).
L'ensemble des termes de la suite se note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.1 Façons de définir une suite :

Il existe essentiellement deux façons :

a) **Suites définies par la donnée explicite de leurs termes :**
Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2n+1$. On peut calculer chaque terme de manière explicite séparément les uns des autres.
De même, soit (v_n) la suite définie par : $v_n = f(n)$ où $f(x) = x^2+5$. On peut calculer chaque terme indépendamment les uns des autres.

b) **Suites définies par récurrence :**
La suite est définie par la donnée d'un ou de plusieurs premiers termes et par une relation entre un terme et un ou plusieurs termes précédents.
Exemples :

- Soit la suite (w_n) définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} w_0 & = & 3 \\ w_{n+1} & = & 4w_n+5 \end{array}\right.$.
  On a : $w_1 = 17$, $w_2 = 73$ ...
- **Suite de Fibonacci :**
  Soit la suite (F_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{array}\right.$.
  On a : $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_{4=5}$, $F_5 = 8$ ...

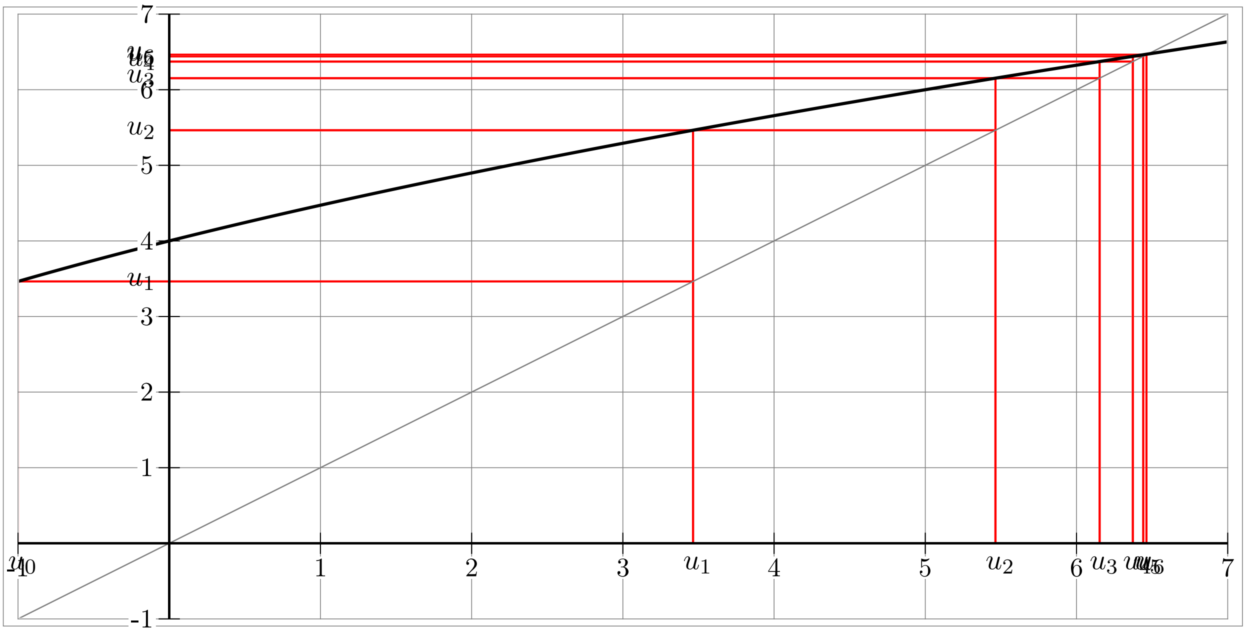
Pour calculer chaque terme, il faut avoir calculé les termes précédents.

Remarque : lorsqu'une suite est définie par récurrence, on essaye de se ramener à une formule explicite des termes, mais ce n'est pas toujours possible.

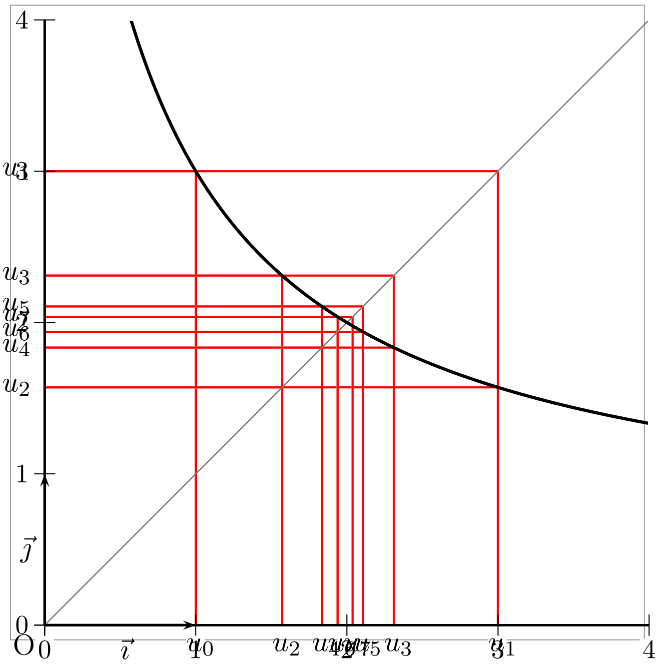
2.2 Représentation graphique

Soit la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u = -1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n+4} \end{array}\right.$
On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2\sqrt{x+4}$.
On représente la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).
Sur l'axe des abscisses, on place $u_0 = -1$.
$u_1 = f(u_0)$; à partir de u_0, on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses jusqu'à la courbe $\mathcal{C}_f$. L'ordonnée du point d'intersection est u_1.
On trace alors la droite parallèle à l'axe des abscisses à partir du point d'intersection précédent jusqu'à la bissectrice ; ce point a pour coordonnées $(u_{1\ ;\ u_1})$; on place alors sur l'axe des abscisses le nombre u_1.
On recommence à partir de u_1 ...

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 4} \end{cases}$$



Autre exemple : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} \end{cases}$



2.3 Sens de variation :

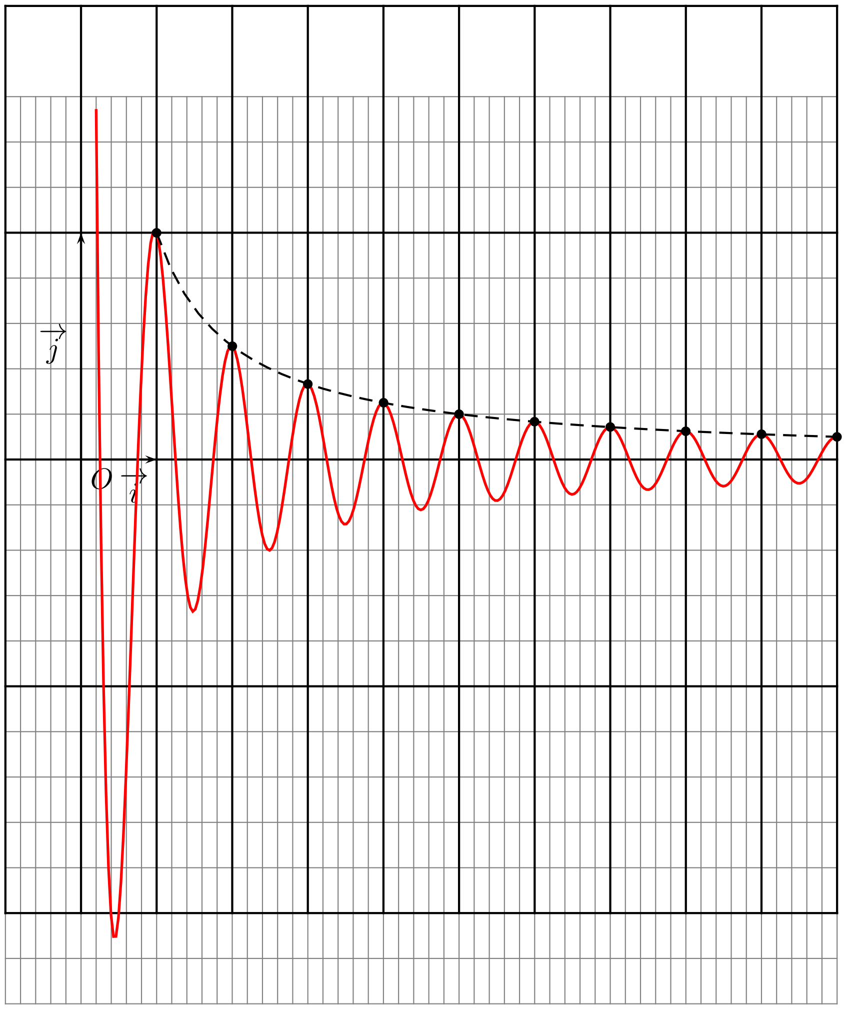
Définition :

Une suite (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est constante si et seulement si, pour tout n, $u_n = u_{n+1}$.

Techniques d'étude :

1. **Technique fonctionnelle** : elle s'applique lorsque la suite est fonctionnelle, c'est-à-dire lorsque l'on a $u_n = f(n)$. On étudie alors les variations de la fonction f. Si f est croissante (décroissante), alors la suite est croissante (décroissante)
Exemple : : Le suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 6n + 1$ est croissante pour $n \geq 3$.
En effet, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 6x + 1$ a pour dérivée : $f' : x \mapsto 2x - 6 = 2(x-3)$ et $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$, donc f est croissante sur $[3\ ;\ \infty[$.

Attention La réciproque est fausse : Exemple : La fonction $g(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{x}$ n'est pas monotone, mais la suite (u_n) définie par $u_n = g(n) = \dfrac{1}{n}$ est décroissante.



2. **Techniques algébriques :**

   (a) On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
   Exemple : soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n + n^2$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = n^2 \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

   (b) Théorème On suppose que, pour tout n, $u_n > 0$,
   Si, pour tout n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1, la suite est croissante ; s'il est compris entre 0 et 1, celle
   est décroissante.

   (c) On peut montrer par récurrence que pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.(cas où la suite u est croissante)

Démonstration : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ qui est du signe de $u_{n+1} - u_n$ puisque le dénominateur u_n est positif pour tout n.

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1}$.
Que peut-on dire de cette suite ?

Réponse : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$
Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Il existe deux types de suites très simples et très courantes en mathématiques qui méritent donc d'être étudiés en détail ; ce sont les suites **arithmétiques** et les suites **géométriques**.

2.4 Suites arithmétiques :

Définition Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre r, appelé raison de la suite, tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$.
On a alors : $u_{n+1} - u_n = r$ (la différence de deux termes consécutifs est constante)

Propriété Terme général : $u_n = u_0 + nr$
ou plus généralement : $u_n = u_p + (n-p)r$ $(n \geqslant p)$.
La suite est complètement déterminée si l'on connaît un terme et la raison.

Démonstration : se fait par récurrence.

Théorème Les suites arithmétiques sont les suites dont le terme général est de la forme : $u_n = an + b$, où a et b sont des constantes.

Démonstration :

- Si (u_n) est arithmétique, $u_n = u_0 + nr = an + b$ avec $a = r$ et $b = u_0$.
- **Réciproque :** soit (u_n) avec $u_n = an + b$; on a : $u_{n+1} - u_n = a$ donc (u_n) est arithmétique de raison $r = a$

Somme de termes consécutifs :

Propriété

Soit $\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Alors : $\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :

On écrit σ_n à l'endroit et à l'envers et on ajoute terme à terme :
$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$
$\sigma_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$
Par somme : $2\sigma_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$ (car il y a n termes égaux à $n+1$).

Par conséquent : $\boxed{\sigma_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique. $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

- **Première formule :** $S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$
- **Deuxième formule :** $S_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
- **Plus généralement :** si $S = x + \ldots + y$ est la somme de p termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors : $S = \frac{p(x+y)}{2}$ (demi-somme des termes extrêmes $\times$ nombre de termes).

Démonstration :

- Première formule :
  $S_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = (n+1)u_0 + r\sigma_n$
  $= (n+1)u_0 + r\dfrac{n(n+1)}{2}$.
- Deuxième formule : écrivons S_n de deux façons différentes, une fois à l'endroit, une fois à l'envers :
  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$
  $S_n = u_n - +u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0$.
  En ajoutant terme à terme :
  $2S_n + (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots + (u_p + u_{n-p}) + \cdots + (u_n + u_0)$.
  Or, pour tout p : $u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_n - pr) = u_0 + u_n$.
  On en déduit : $2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$ (car il y a $(n+1)$ termes) donc $\boxed{S_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}}$
- $S = x + \cdots + y = x + (x + r) + (x + 2r) + \cdots + x + (p-1)r$ (puisqu'il y a p termes). $S = y + (y - r) + (y - 2r) + \cdots + y - (p-1)r)$ (en écrivant la somme à partir du dernier terme).
  En effectuant la somme terme à terme, on obtient : $2S = (x+y) + (x+y) + \cdots + (x+y) = p(x+y)$ (puisqu'il y a p termes) d'où : $S = \dfrac{p(x+y)}{2}$.

  Exemple : calculer $S = 100 + 102 + \cdots + 154$.
  Ce sont les termes d'une suite arithmétique de raison $r = 2$. Il y a 28 termes ($154 = 100 + 27 \times 2$).
  Donc : $S = \dfrac{28(100 + 154)}{2} = 3\,556$
- **Variations :**

  Théorème

  Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
  (u_n) est croissante si, et seulement si, r est positif.
  (u_n) est décroissante si, et seulement si, r est négatif.
  (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.

  Démonstration : $u_{n+1} - u_n = r$ d'où le résultat.

2.5 Suites géométriques :

Définition
Une suite (u_n) est géométrique si et seulement s'il existe un nombre réel q appelé raison de la suite, tel que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = qu_n$.

Théorème

Alors, pour tout n : $u_n = qu_{n-1}$ ou plus généralement : $u_n = u_p q^{n-p}$ pour $p \leqslant n$.
Une suite géométrique est entièrement déterminée par un terme et sa raison.

La démonstration se fait par récurrence.

Théorème

Les suites géométriques sont les suites dont le terme général est de la forme $u_n = aq^n$, a et q étant des constantes.

Démonstration :

- Si (u_n) est géométrique, $u_n = u_0 q^n = aq_n$ avec $a = u_0$.
- **Réciproque :** Si $u_n = aq^n$, $u_{n+1} = aq^{n+1}$ donc $u_{n+1} = au_n$: (u_n) est bien géométrique, de raison a.

Somme de termes consécutifs :

Propriété

Soit q un nombre. Posons $\sigma_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=1}^{n} q^i$.

- Si $q = 1$, $\sigma_n = (n+1)$.
- si $q \neq 1$, on a : $\sigma_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Démonstration :

- Si $q = 1$, c'est évident ; $S_n + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$.
- Si $q \neq 1$, on calcule S_n et qS_n et on soustrait :
  $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$.
  $qS_n = \quad q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$.
  Alors : $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$ (il ne reste que le premier terme de la première ligne et le dernier de la deuxième ligne).
  D'où : $S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$ et : $\boxed{S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$).

- Soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Si $S = x + \ldots + y$ est la somme de p termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$), alors :
  $\boxed{S = x\left(\dfrac{1-q^p}{1-q}\right)}$

3 Limites des suites :

3.1 Limite infinie :

Définition :

- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$ avec A réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
  On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty\,;\,A[$ avec A réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
  On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemples :

- Soit (u_n) définie par : $u_n = n^2$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  Démonstration : soit $A > 0$. Prenons $p = E(\sqrt{A}) + 1$. Alors $p^2 > A$. Pour tout $n \geqslant p$, $u_n = n^2 > p^2 > A$ donc $u_n \in [A\ ;\ +\infty[$.
  D'après la définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- $u_n = -n^3$: de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + +\infty$

3.2 Cas des suites croissantes non majorées

Définition

- Dire qu'une suite u est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- Dire qu'une suite u est minorée signifie qu'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.

Exemple : u est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 2 + \frac{1}{n}$. u est minorée et majorée.

Propriété :

(a) Si u est une suite croissante non majorée, alors u tend vers $+\infty$.

(b) Si u est une suite décroissante non minorée, alors u tend vers $-\infty$.

Démonstration de (a) :

Soit A un réel quelconque. Comme u n'est pas majorée, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.
La suite u est croissante, donc, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.
Alors, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \in]A; +\infty[$.
Ainsi, la suite tend vers $+\infty$.

Même démonstration pour (b)

3.3 Limite finie

Définition

ℓ désigne un réel quelconque. Dire qu'une suite u a pour limite ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite est convergente vers ℓ.

Notation et exemples : On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Remarque : une suite qui n'est pas convergente est divergente.

 page 10 page 10

Définition Une suite divergente est une suite non convergente.
Elle a une limite infinie **ou** n'a pas de limite.

Exemple 1 : u est la suite définie sur N* par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

1. Démontrer que la suite u est croissante.

2. Démontrer que pour $m \geqslant 1$, $u_{2m} - u_m \geqslant \frac{1}{2}$ [1]

3. Écrire l'inégalité [1] successivement pour $m = 1$, $m = 2$, $m = 4$, $m = 8$, …, $m = 2^{n-1}$ puis additionner membre à membre ces inégalités.
   En déduire que $u_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$. En déduire que la suite u n'est pas majorée et déterminer la limite de la suite u.

Exemple 2 :
Que peut-on dire de la suite (u_n) définie par : $u_n = (-1)^n$?

Exercice : Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Solution :
Soit (u_n) une suite qui converge vers une réel ℓ.
Considérons par exemple l'intervalle $]\ell - 1\ ;\ \ell + 1[$.
D'après la définition de la convergence, il existe un réel A tel que, pour tout $n > A$, $u_n \in]\ell - 1\ ;\ \ell + 1[$.
Les termes u_0, u_1, …, u_A sont en nombre fini, donc bornés, par le plus petit et le plus grand d'entre eux.
Les termes u_n, pour $n > A$ sont bornés par $\ell - 1$ et $\ell + 1$.
On en déduit que la suite est bornée.

3.4 Unicité de la limite

Théorème Soit (u_n) une suite convergente. Elle admet donc une limite ℓ.
Cette limite est **unique**.

Démonstration :
Effectuons un raisonnement par l'absurde.
Supposons que la suite admette deux limites, ℓ et ℓ', avec $\ell < \ell'$.
Posons $h = \dfrac{\ell' - \ell}{3}$.
Puisque la suite converge vers ℓ, il existe un entier A, tel que, pour tout $n > A$, $u_n \in]\ell - h\ ;\ \ell + h[$. La suite converge vers ℓ', donc il existe un entier B, tel que, pour tout $n > B$, $u_n \in]\ell' - h\ ;\ \ell' + h[$.
Soit C le maximum de A et de B : $C = Max(A\ ;\ B)$.
Pour $n > C$, $u_n \in]\ell - h\ ;\ \ell + h[\cap]\ell' - h\ ;\ \ell' + h[$; or, ces deux intervalles sont disjoints.
En effet : $\ell' - h - (\ell + h) = \ell' - \ell - 2h = \ell' - \ell - 2\dfrac{\ell' - \ell}{3} = \dfrac{3(\ell' - \ell) - (\ell' - \ell)}{3} = \dfrac{\ell' - \ell}{3} > 0$.
C'est impossible, donc l'hypothèse de départ est fausse.

3.5 Théorème des gendarmes (admis)

Théorème des gendarmes

- **Premier cas :** Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Soit une autre suite (v_n). S'il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, $v_n \geq u_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
  On a une propriété analogue si la limite est $-\infty$.
- **Deuxième cas :** Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ et s'il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Démonstration (hors-programme) :

- **Premier cas :**
Soit $A > 0$ un nombre quelconque.
(u_n) tend vers $+\infty$, donc il existe un entier q tel que, pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.
Pour tout $n \geqslant p$, $v_n \geqslant u_n$.
Soit $r = \text{Max}(p\ ;\ q)$. (r est le plus grand des deux entiers p et q).
Pour tout $n \geqslant r$, $A < u_n \leqslant v_n$ donc $v_n > A$.
La suite (v_n) tend donc vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- **Deuxième cas :**
Soit $I =]\ell - \alpha\ ;\ \ell + \alpha[$ un intervalle quelconque centré sur ℓ.
$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc il exite un entier q tel que, pour tout $n \geqslant q$, $u_n \in]\ell - \alpha\ ;\ \ell + \alpha[$.
$\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ donc il existe un entier r tel que, pour tout $n \geqslant r$, $w_n \in]\ell - \alpha\ ;\ \ell + \alpha[$.
On sait que, pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Soit $s = \text{Max}(p\ ;\ q\ ;\ r)$.
Pour tout entier $n \geqslant s$, $\ell - \alpha \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \alpha$, donc $w_n \in]\ell - \alpha\ ;\ \ell + \alpha[$.
On en déduit que la suite (w_n) a aussi pour limite ℓ.

Exemple :

3.6 Opérations et limites

Addition ou soustraction

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si (v_n) a pour limite	$\ell \neq 0'$	$\pm\infty$	0	ℓ'	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	**Forme indéterminée**	**Forme indéterminée**

Remarque : Les formes indéterminées sont : ´ $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$´ .

3.7 Limites et puissances

Propriété

- Soit $q > 1$; alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Soit $q \in]-1\ ;\ 1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Démonstration :

- Soit $a > 0$ un réel. Démontrons par récurrence que, pour tout n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
  a) Pour $n = 0$: $(1+a)^0 = 1$ et $1 + na = 1 + 0a = 1$ donc c'est vrai au rang $n = 0$
  b) On suppose que c'est vrai pour un rang n quelconque, donc $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
  Alors : $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$ car $na^2 > 0$.
  La propriété est vraie au rang $n+1$, donc héréditaire.
  Elle est donc vraie pour tout n.
- Soit $q > 1$. Il existe a tel que $q = 1 + a$.
  Alors $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}(1+na) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 0$, c'est évident
  Si $0 < q < 1$, on pose $Q = \dfrac{1}{q} > 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{Q}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{Q^n}\right) = 0$ d'après ce qui précède.
  Si $-1 < q < 0$, $q = -Q$ avec $0 < Q < 1$ et on applique ce qui précède.

4 Théorème de convergence :

Théorème admis :**IMPORTANTISSIME**

— Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
— Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_n = 2,\underbrace{4848\cdots 48}_{n \text{ groupes } 48}$ pour $n \geqslant 1$.

Il est clair que cette suite est croissante, majorée par 3 (ou 2,5), donc elle est convergente vers une limite réelle ℓ, avec $\ell = 2,484848484848\cdots$.

Essayons de trouver une **expression rationnelle** de ℓ.

On a : $u_n = 2 + \dfrac{48}{100} + \dfrac{48}{1000} + \cdots + \dfrac{48}{10^{2n}} = 2 + 48 \times \left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^4} + \dfrac{1}{10^6} + \cdots + \dfrac{1}{10^{2n}}\right)$
$= 2 + 48 \times \left[\left(\dfrac{1}{10^2}\right) + \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n\right]$.

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

On en déduit : $u_n = 2+48\times\dfrac{1}{10^2}\times\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{10^2}} = 2+48\times\dfrac{1}{100}\times\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n}{\dfrac{99}{100}} = 2+48\times\dfrac{1}{100}\times\dfrac{100}{99}\left(1-\left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n\right)$.

Comme $-1 < \dfrac{1}{10^2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = 2 + 48 \times \dfrac{1}{99} = \dfrac{2 \times 99 + 48}{99} = \boxed{\dfrac{246}{99}}$.

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times u_n + 2 \end{array}\right.$

1. Montrer que la suite u est croissante et bornée par 0 et 3.
2. En déduire que la suite u converge.
3. Déterminer sa limite.

(Remarquez que $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{3} \times x + 2$)

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{array}\right.$

1. Montrer que la suite u est croissante et minorée par 2.
2. Démontrer que la suite u n'est pas majorée.
3. Déterminer sa limite.

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times u_n + 2 \end{array}\right.$

1. Montrer que la suite u est croissante et bornée par 0 et 3.
2. En déduire que la suite u converge.
3. Déterminer sa limite.

(Remarquez que $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{3} \times x + 2$)

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{array}\right.$

1. Montrer que la suite u est croissante et minorée par 2.
2. Démontrer que la suite u n'est pas majorée.
3. Déterminer sa limite.